Efeito Efimov

Moriya, P. H.
Grupo de Óptica, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo
SFI5877 - Interação da luz com a matéria: Fundamentos e aplicações
disciplina ministrada por Prof. Dr. Philippe Wilhelm Courteille

O aparecimento de uma infinidade de estados ligados entre duas partículas que não se vinculariam pela simples interação com uma terceira partícula, adicionada ao sistema inicial, é denominado efeito Efimov. Esse efeito contra intuitivo foi previsto por V. Efimov para um sistema de bósons interagentes com um potencial de curto alcance, mas pode ser evidenciado em sistemas de partículas não idênticas. Recentemente, o efeito Efimov foi observado experimentalmente com a ajuda de átomos ultrafrios. Este texto tentará explicar a origem deste efeito muito pouco explorado em livros de física em geral para estudantes de graduação e pós-graduação.

INTRODUÇÃO

Considerando três bósons idênticos que ocupam um estado s (espacialmente simétrico), Efimov previu em 1970 que o espectro obedece a uma lei de escala geométrica [1], de tal forma que o raio dos autovalores de energias sucessivas do sistema é uma constante. Essa escala resulta em uma acumulação de estados de energias próximas a zero, com o tamanho do sistema crescendo por um fator de 22.7. A quantidade de estados ligados de três corpos é infinita quando o dímero de ligação é zero, entretanto este número é diminuído quando a interação se torna mais atrativa.

Uma prova rigorosa das predições de Efimov foi feita em 1972 [2] e mais recentemente, uma solução analítica para três bósons idênticos que satisfazem o espectro de Efimov foi obtida [3]. Para verificar manifestações de sua teoria, Efimov examinou o núcleo de trítio e ^{12}C mas sistemas nucleares não podem ser ajustados para atingir estados ligados de dois corpos com zero de energia e, ainda, o potencial de Coulomb para prótons restringe o número de candidatos a serem analisados [4]. Felizmente, átomos neutros ultrafrios, com forças de interação ajustáveis, superam tais obstáculos como, por exemplo, um gás diluído de ^{133}Cs em uma armadilha óptica à 10 nK [5]. Em temperaturas tão baixas, o movimento térmico não suprime os efeitos quânticos e a interação de dois corpos entre os átomos pode ser ajustada usando ressonâncias de Feshbach [6,7,8]. Sob tais condições ocorre a formação de trímeros de Efimov, observados em misturas de ^{41}K e ^{87}Rb [9].

Na próxima seção, será feita uma breve revisão de espalhamento de baixa energia de duas partículas com uma introdução das técnicas de análise do sistema de três corpos e potenciais separáveis. A seguir, evidenciam-se as propriedades da interação $1/r^2$ e, com esses conhecimentos, deriva-se o efeito Efimov. Por fim, mostram-se evidências experimentais recentes que fizeram deste um tópico de muito interesse [10] e as conclusões pertinentes serão feitas.

O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Parâmetros de baixa energia

Em espalhamentos elásticos de duas partículas, as energias inicial e final são idênticas, assim apenas o momento transferido se torna importante. Todos os parâmetros importantes (tais como amplitude de espalhamento, seção transversal e outros observáveis) são descritos em função de um deslocamento de fase que ocorre em cada onda parcial de uma função de onda assintótica, onde se assume que a interação entre dois corpos é central e decai mais rápido que $1/r^2$ (r é a distância entre as partículas). Na presença de mais partículas, o problema se torna não trivial, ocorrendo perdas de energia no processo de espalhamento com as partículas interagindo aos pares (interação de curto alcance).

O efeito Efimov aparece quando a interação de dois corpos, entre pelo menos dois pares, é ajustada para ressonância, independentemente das características do potencial. Na ressonância, a função de onda é quase ligante e se estende por grandes distâncias. Para obter essas funções de onda de dois corpos uma escolha possível é o potencial separável (uma forma específica de potencial não local), que facilita o tratamento das equações de Fadeev [2] até mesmo para o caso de três corpos.

Para o espalhamento de duas partículas em baixas energias, a interação só será efetiva no estado s relativos, já que há uma barreira centrífuga nas ondas parciais de ordem maior que suprimem a aproximação das partículas. A amplitude de espalhamento para uma onda s é dada por

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{1}{k}\mathrm{e}^{\imath\delta_0(k)}\sin\Big(\delta_0(k)\Big) \\ &= \frac{1}{k\cot\Big(\delta_0(k)\Big) - \imath k}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\delta_0(k)$ é o deslocamento de fase de onda s e a seção transversal diferencial para espalhamento de onda s é isotrópica e é dada por $|f_0(k)|^2$.

O espalhamento entre duas partículas é bem conhecida [12,13] à baixas energias por dois parâmetros: o comprimento de espalhamento a, relacionado com a energia zero assintótica da função de onda da onda s, e o alcance efetivo r_0, que mede o alcance de um potencial de dois corpos, onde $k\cot(\delta_0(k)) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2 + \ldots$.

Considerando uma situação onde o potencial atrativo não é forte o suficiente para manter um estado ligado de dois corpos, caso no qual o sinal do comprimento de espalhamento é negativo e conforme o potencial se torna mais atrativo, tal grandeza será mais e mais negativa, chegando a $-\infty$ na ressonância (i.e., um estado ligado em $E = 0$). Fazendo este potencial ainda mais atrativo, o comprimento de espalhamento se tornará positivo (mas com $a \gg r_0$), resultando na formação de dímeros. Para um potencial de alcance zero, apenas o primeiro termo da expansão acima sobreviverá e extrapolando-se os números de onda para valores imaginários, $k = \imath\kappa_0$ pode-se obter que o dímero tem energia $E_b = -\frac{\hbar^2}{Ma^2}$, onde M é a massa de cada átomo isolado. A função de onda correspondente para $r < r_0$ é dada por $\psi_0(r){\sim}(1/r)\mathrm{e}^{-\frac{r}{a}}$, que para $r{\ll}a$ mostra a conexão com o ponto de interceptação com o comprimento de espalhamento.

Potencial de dois corpos separável

Um potencial separável é uma forma especial de interação não local que tem sido muito utilizada em problemas de três corpos em física nuclear [14,15], pois resulta em uma simplificação considerável na equação integral de Fadeev e que vem sendo explorada para dar um tratamento rigoroso [16] ao efeito Efimov. Considerando o espalhamento de uma partícula pesada de massa M interagindo com uma partícula leve de massa m (proporção de massa $\rho = M/m$), a energia relativa será dada por $E_2 = \frac{k^2}{\nu'}$ (considerando $\hbar = 2m = 1$), onde $\nu = \frac{\rho}{\rho+1}$. Substituindo na equação de Schrödinger e utilizando-se dos limite $\rho{\gg}1$ e $\nu' = 1$, obtém-se a equação de autovalores $(k^2 - H_0)|\psi_k\rangle = V|\psi_k\rangle$, onde H_0 é o operador de energia cinética. Pode-se utilizar as coordenadas relativas entre as partículas, $\mathbf{r}$, para depois chegar à equação de Schrödinger na representação de momentos

$$(k^2 - p^2)\psi_k(\mathbf{p}) = \int \langle \mathbf{p}|V|\mathbf{p}'\rangle \psi_k(\mathbf{p}')d^3p'. \tag{2}$$

O potencial separável no espaço de Hilbert deve ser escrito como $V = -\lambda|g\rangle\langle g|$, com o sinal negativo representando a atração e $\lambda(> 0)$ determinando o poder do potencial. Na representação de coordenadas, o potencial separável atrativo para o estado s é dado por $\langle g|V|g\rangle = -\lambda g(r)g(r')$, com $g(r)$ real e na presença de estados ligados a transformada de Fourier deste está relacionada com sua função de onda. Com este potencial, a equação (2) se torna (com $k^2 = -\kappa_0^2$)

$$(\kappa_0^2 + p^2)\psi_{\kappa_0}(\mathbf{p}) = \lambda g(p) \int g(p')\psi_{\kappa_0}(\mathbf{p}')d^3p', \tag{3}$$

onde $g(p)$ é $g(r)$ no espaço de momentos e

$$\psi_{\kappa_0}(\mathbf{p}) = \lambda C_{\kappa_0} \frac{g(p)}{\kappa_0^2 + p^2}, \tag{4}$$

com C_{κ_0} uma constante não-nula. Multiplicando ambos os lados de (4) por $g(p)$ e integrando em d^3p pode-se determinar a energia de ligação κ_0^2 para um dado potencial

$$\lambda \int \frac{g^2(p)}{\kappa_0^2 + p^2} d^3p = 1. \tag{5}$$

Para cálculos explícitos, pode-se escolher a forma popular [17] $g(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}$ o que resulta em $g(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-\beta r}}{r}$ e na modificação de (5)

$$\psi_{\kappa_0}(\mathbf{p}) = \lambda C_{\kappa_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\kappa_0 r}}{r} - \frac{\mathrm{e}^{-\beta r}}{r} \right). \tag{6}$$

Para ligação fraca, κ_0 é muito pouco maior que zero. Se a opção for potenciais de curto alcance, então $\beta{\gg}\kappa_0$ e assintóticamente (6) e se torna igual a função de onda obtida pela aproximação de alcance nulo. A natureza universal do efeito Efimov é independente de uma escolha específica de $g(r)$.

ESPECTRO DE EFIMOV E O POTENCIAL $1/r^2$

O espectro de Efimov do problema de três corpos é a assinatura de um potencial central atrativo que decai assintoticamente com o inverso do quadrado da distância. Um potencial de três corpos de longo alcance é obtido por notar que para valores grandes e positivos de a, o tamanho do dímero é muito grande e a presença de outro átomos, mesmo que muito distante, será sentida. No limite inverso, mesmo que não ligados, estes serão espacialmente correlacionados a uma distância da ordem de $|a|$ em um estado quase ligado.

Para obter a escala geométrica do espectro, é suficiente considerar o problema de uma partícula de massa m em um potencial $V(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda}{r^2}$, onde λ é uma constante de acoplamento adimensional. Classicamente a equação de movimento nesse potencial independe da escala sob transformações contínuas $\mathbf{r} \to \alpha\mathbf{r}$ e $t \to \alpha t^2$. Na mecânica quântica, para $\lambda > -1/4$ não existirão estados ligados, mas a invariância de escala contínua continua válida. O estado de zero de energia aparece para $\lambda = -1/4$ e tem comportamento anômalo para $\lambda < -1/4$, devido a distância reduzida à singularidade do potencial, o que implica na não existência de um limite inferior do espectro de energia. Para regularizar essa situação, introduz-se um parâmetro r_c tomado como uma distância de corte para curto alcance, de tal forma que $r > r_c$. Se impõe-se que as funções de onda são nulas em $r = r_c$ como condição de contorno obtém-se um espectro discreto e a propriedade de escala geométrica é independente de r_c.

Na equação de Schrödinger para o estado s com $r > r_c$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(s_0^2 + 1/4)}{r^2}\right]u(r) = \frac{2mE}{\hbar^2}u(r), \qquad (7)$$

onde $s_0^2 \geq 0$ é apenas uma forma de parametrizar o poder do potencial $1/r^2$ e é maior que $1/4$. Para estados ligados $2me/\hbar^2 = -\kappa^2$ e as funções de onda se anulam no infinito, com isso podemos obter a solução $u(\kappa r) = \sqrt{\kappa r}K_{\imath s_0}(\kappa r)$, $K_{\imath s_0}$ é a função de Bessel modificada de terceira espécie de ordem puramente imaginária $\imath s_0$. A condição de contorno $u(\kappa r_c) = 0$ faz de κ um valor discreto de tal forma que $K_{\imath s_0}(\kappa_n r_c) = 0$, com n um inteiro positivo. Para estados ligados superficiais ($\kappa_n r_c \ll 1$), os zeros da função de Bessel são dados por

$$\kappa_n r_c = \exp\left\{-\frac{n\pi}{s_0}\right\}(2e^{-\gamma})\Big[1 + O(s_0) + \dots\Big], \qquad (8)$$

onde γ é a constante de Euler e este resultado acima leva a citada escala geométrica

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \exp\left\{-\frac{2\pi}{s_0}\right\} \qquad n = 1, 2 \dots, \infty \qquad (9)$$

Pode-se notar que conforme o valor de n é aumentado, os estados se tornam mais superficiais com uma infinidade destes se acumulando ao redor do zero de energia.

No problema de três corpos, onde as partículas interagem aos pares, restarão 6 graus de liberdade após a eliminação dos graus de liberdade do centro de massa, com isso o problema é comumente tratado em coordenadas hiperesféricas com um hiperraio variável R e cinco ângulos. Neste caso, para partículas de massas iguais $R = \sqrt{\frac{1}{3}(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)}$. Na aproximação adiabática [18] para R fixo, pode-se resolver a equação de Schrödinger para as variáveis angulares e obter um conjunto de autovalores $\epsilon(R)$ e suas respectivas autofunções. Tal solução mostra que em um limite ressonante $a \to \pm\infty$ e negligenciando o acoplamento de canais, o mesmo resultado (1) aparecerá nas coordenadas hiperesféricas com r substituindo R. Para bósons idênticos, $s_0 \sim 1.00624$, $e^{\frac{\pi}{s_0}} \simeq 22.694$ e com $|a| \gg r_0$ o número de estados ligados é dado por $N \simeq \frac{s_0}{\pi}\ln\{|a|/r_0\}$.

O MODELO DE TRÊS CORPOS

Para estudar o problema de três corpos, considera-se o problema de duas partículas idênticas de massa M, rotuladas como 1 e 2 e uma terceira (denominada 3) de massa $m \ll M$ com as coordenadas das partículas denominadas $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, 3$) a partir de uma origem arbitrária. Introduzindo as coordenadas relativas $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$, a convenção V_i como o potencial entre as partículas j e k (obedecendo uma ordem cíclica) e ainda $\rho = M/m$ (com $\hbar = 2m = 1$), pode-se escrever a equação de Schrödinger $H\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, com E sendo tomado com a energia do sistema e

$$H = -\frac{1}{\mu}\nabla_R^2 - \frac{1}{\nu}\nabla_r^2 + V_1 + V_2 + V_3, \qquad (10)$$

onde $\mu = \rho/2$ e $\nu = 2\rho/(2\rho + 1)$.

No limite $\rho \gg 1$, pode-se fazer uma aproximação do tipo Born-Oppenheimer onde as partículas muito pesadas tem movimento muito lento comparado com a outra. Neste espírito, decompõe-se a função de onda $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})\phi(\mathbf{R})$ onde $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, com energia $\epsilon(R)$, é primeiro resolvido para o movimento relativo do sistema leve-pesado, mantendo $\mathbf{R}$ como um parâmetro fixo. Neste primeiro estágio, a energia cinética das partículas pesadas podem ser negligenciadas e o potencial entre elas é apenas um deslocamento de energia constante, com isso a equação de movimento se torna

$$\left[-\nabla_r^2 + V_1\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{R}}{2}\right) + V_2\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{R}}{2}\right)\right]\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \epsilon(R)\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \qquad (11)$$

A seguir, a equação

$$\left[-\frac{1}{\mu}\nabla_R^2 + V_3(R) + \epsilon(R)\right]\phi(\mathbf{R}) = E\phi(\mathbf{R}), \qquad (12)$$

que representa o movimento das duas partículas pesadas, com $\epsilon(R)$ como potencial adiabático, é resolvida para a energia do estado fundamental, E, mas como $V_3(R)$ decai mais rapidamente que o comportamento assintótico de $\epsilon(R)$, este pode ser negligenciado. Para as V_1 e V_2 na equação (11) pode-se adotar um potencial de curto alcance $-\lambda|g\rangle\langle g|$, com isso fazendo-se do uso do operador deslocamento $D = \exp\{\imath p_r \cdot (R/2)\}$ chega-se a

$$\left[-\nabla_r^2 - \lambda\Big(D|g\rangle\langle g|D^{-1} + D^{-1}|g\rangle\langle g|D\Big)\right]|\psi\rangle = \epsilon(R)|\psi\rangle, \qquad (13)$$

Tomando $\epsilon(R) = -\kappa^2(R)$, $G = (-\nabla_r^2 + \kappa^2)^{-1}$, $\langle g|D|\psi\rangle = N(\mathbf{R}/2)$ e valendo-se da paridade definida da função $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ é possível obter

$$|\psi\rangle = \lambda G\Big(D^{-1}|g\rangle + D|g\rangle\Big)N(\mathbf{R}/2), \qquad (14)$$

multiplicando ambos os lados por $\langle g|D$, efetuando um pouco de álgebra e levando para a representação de momentos

$$\lambda\int\frac{g^2(p_r)}{p_r^2 + \kappa^2}d^3p_r + \lambda\int\frac{g^2(p_r)e^{\imath\mathbf{p_r}\cdot\mathbf{R}}}{p_r^2 + \kappa^2}d^3p_r = 1, \qquad (15)$$

que é equivalente a equação (5). Para o caso popular já citado [17], $g(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}$ obtém-se o resultado

$$1 - \left(\frac{\beta + \kappa_0}{\beta + \kappa}\right)^2 = \left(\frac{\beta + \kappa_0}{\beta + \kappa}\right)^2 \left[\frac{2\beta}{(\beta - \kappa)^2} \frac{e^{-\kappa R} - e^{-\beta R}}{R} \frac{\beta + \kappa}{\beta - \kappa} e^{-\beta R}\right]. \quad (16)$$

Podemos notar que conforme a distância R aumenta a partícula leve tende a se ligar a uma das duas partículas pesadas e $\kappa^2(R) \to \kappa_0^2$, neste caso pode-se estudar $\epsilon(R) = -\kappa^2(R)$, em função do parâmetro$\xi \equiv \kappa - \kappa_0$. Neste caso vemos que o potencial proporcional a $\frac{1}{r^2}$ desejado é obtido, assim como o espectro de Efimov, mas dependendo da relação entre a distância entre as partículas pesadas R e o comprimento de espalhamento a pode-se atingir regiões onde não há colapso dos estados de Efimov, fenômeno denominado efeito Thomas [19].

EVIDÊNCIAS EXPERIMENTAIS

Começando com o trabalho pioneiro de Kraemer *et al.* [5] com átomos de Cs ultrafrios em 2006, muitos experimentos [20, 21, 22] tem confirmado as previões de Efimov pela perdas de recombinação de três corpos de átomos através da reação $A + A + A \to A^2 + A$. O experimento com átomos heteronucleares foi feito por Barontini *et al.* [9]. Todos esses experimentos precisaram de temperaturas muito baixas, $k_B T \leq \frac{\hbar^2}{Ma^2}$, para um comprimento de espalhamento muito grande para evitar a quebra dos dímeros (para átomos de Cs é necessário $T = 10\, nK$).

Os átomos em um gás tem a tendência de formar dímeros de baixa energia diretamente para comprimentos de espalhamento positivos, mas tois átomos sozinhos não podem formar um estado ligado e preservam momento e energia ao mesmo tempo. A formação de dímeros é possível se um terceiro átomo nas vizinhanças esteja a uma distância da ordem de a. Esse problema foi estudado em um gás de átomos idênticos com densidade n enquanto era monitorada as perdas atômicas em condensados de Bose-Einstein.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notável e não previsível em 1970 que o efeito Efimov tenha sido observado experimentalmente pelo uso de átomos ultra-frios. Neste artigo, considerou-se o caso simples para o qual há interação entre dois átomos são muito mais pesados em comparação com um terceiro e como evidenciado os pares são tratados de forma diferente, por exemplo a aproximação adiabática. A partícula leve pode estar a grandes distâncias de seus parceiros mais pesados e o tamanho dos trímeros de Efimov raso é grande em comparação com a interação de dois corpos em curto alcance. De modo geral, a partícula mais leve gera uma atração efetiva de longo alcance entre as mais pesadas.

Um tratamento alternativo para três bósons iguais foi evidenciado para chegar a um resultado analítico, com cada partícula sendo estudada da mesma forma com o uso de coordenadas hiperesféricas, necessárias para descrever os estados de Efimov raso. O tamanho destes estados é grande e a fraca ligação leva a formação de triângulos instáveis.

Apesar de ser uma área extremamente ativa na física atual, tanto teorica quanto experimentalmente, é dificil encontrar textos introdutórios, voltados para estudantes de graduação e pós-graduação, que ajudem na compreensão de tal fenômeno que parece ser completamente contra intuitivo.

REFERÊNCIAS

[1] V. Efimov, *Phys. Lett. B* **33**, 563-564 (1970); *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589-595 (1971); *Sov. J. Nucl. Phys.* **29**, 546-553 (1971).

[2] R.D. Amado *et al.*, *Phys. Rev. D* **5**, 1992-2002 (1972).

[3] A.O. Gogolin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 140404-1(4) (2008).

[4] I. Mazumdar *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 062503-1(4) (2006).

[5] T. Kraemer *et al.*, *Nature* **440**, 315-318 (2006).

[6] H. Feshbach, *Ann. Phys.* **281**, 519-546 (2000).

[7] Maiores descrições em http://www.phys.ens.fr/ castin/progtot.html.

[8] C. Chin *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225-1286 (2010).

[9] G. Barontini *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 043201-1(4) (2009).

[10] F. Ferliano *et al.*, *Physics* **3**, 1-21 (2010); C. H. Green, *Physics Today* **53**, 40-45 (2010).

[11] L.D. Fadeev, *Mathematical problems of the Quantum Theory of Scattering for a Three-particle system* No. 69.

[12] H.A. Bethe *et al.*, *Phys. Rev.* **76**, 38-50 (1949).

[13] J.M. Blatt *et al.*, *Theoretical Nuclear Physics*, pp. 56-63.

[14] A.N. Mitra, *Phys. Rev.* **32**, 521-542 (1961).

[15] F. Tabakin, *Phys. Rev.* **137**, B75-B79 (1965).

[16] S.K. Adhikari *et al.*, *Phys. Rev. C* **26**, 77-82 (1982).

[17] Y. Yamaguchi, *Phys. Rev.* **95**, 1628-1634 (1954).

[18] J.H. Macek, *Phys. Scr.* **76**, C3-C11 (2007).

[19] L.H. Thomas, *Phys. Rev.* **47**, 903-909 (1935).

[20] M. Zaccanti *et al.*, *Nature Physics* **5**, 586-591 (2009).

[21] N. Gross *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 163202-1(4) (2009).

[22] S.E. Pollack, *Science* **326**, 1683-1685 (2009).